820. D’Amore B. (2014). Insegnamento/Apprendimento significativo della matemática nella scuola dell’infanzia. In: D’Amore B. (Editor) (2014). *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Atti del Convegno Nazionale omonimo, 3-4-5 marzo 2014, Tricase (Lecce). Bologna: Pitagora. Pagg. 104. ISBN: 88-371-1892-9. 47-62.

Bruno D’Amore (DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà)
***Insegnamento/Apprendimento significativo della matematica nella scuola dell’infanzia*.**

1. Una premessa.

Alla parola “matematica” molte persone associano stereotipi scolastici: espressioni, formule, figure, teoremi da imparare a memoria, equazioni da risolvere, calcoli, ... In queste condizioni, se si nominano accanto i termini “matematica” e “scuola dell'infanzia”, la reazione più tipica (per esempio di alcuni colleghi insegnanti universitari di matematica) è di stupore o di derisione.
Una conferma a questo atteggiamento potrebbe sembrare legata alla scelta degli *Orientamenti 1991* (cioè del testo del Ministero Italiano della Pubblica Istruzione, che descrive gli scopi educativi e cognitivi della Scuola dell’Infanzia), nei quali i campi di esperienza riflettono sì le discipline scolastiche, ma senza nominarle.
Si potrebbe leggere ciò in due modi diametralmente opposti:
- quella disciplina che appare delineata nel campo di esperienza “spazio, ordine, misura” è sì matematica, ma è meglio non dirlo;
- quella non è ancora matematica.

Gli studi di didattica della matematica degli ultimi vent’anni hanno messo a fuoco la delicatissima funzione mediatrice che ha l’insegnante di matematica nella storia cognitiva di un individuo. Ma gli studi solitamente riguardano la scuola primaria e la scuola secondaria, talvolta l’università. È veramente difficile trovare studi significativi sulla fascia d’età della scuola dell’infanzia.

Ciò mi costringe a precisare meglio la mia posizione.

È ormai attività corrente di tutti i maestri di scuola primaria compiere una ricognizione per stabilire quali siano le competenze matematiche dei bambini in ingresso in prima. Non solo: nel tema “Aritmetica” dei programmi ministeriali per la scuola elementare si insiste giustamente sul fatto che il bambino possiede già sui numeri diverse competenze sulle quali è bene fondare la successiva didattica, evitando di considerarle nulle. A ben vedere, i bambini hanno già numerose intuizioni sul numero come ordinale, cardinale, sul numero-valore del denaro, sul numero nell’uso relativo al tempo, sul numero come espressione di una misurazione, addirittura sul numero da un punto di vista ricorsivo, anche se certamente il numero più presente (quello che emerge in modo spontaneo) è il cosiddetto numero-etichetta.
Certo, attività intelligenti nella scuola dell’infanzia rafforzano e stimolano (con giochi opportuni, ma anche spesso con giochi liberi: filastrocche numeriche, cantilene ecc...), ma non creano, perché un’immagine del numero c’è già.
Per esempio, quali immagini si fanno i bambini del numero o, meglio, dei particolari numeri? Quali immagini si fanno dei predicati legati al numeri? Insomma, che cosa significa, per esempio, che un numero è “grande”?
In un’esperienza effettuata nella scuola comunale dell’infanzia di Ozzano Emilia (Bologna), ho giocato con bambini di 5 anni, intervistandoli in modo collettivo. Le risposte alle domande, come sempre accade, apparivano lì per lì poco consone alle domande poste. Ma, consapevole di questa

possibilità, avevo predisposto una registrazione con videocassette che ho poi rianalizzato con calma ed attenzione. Ne emergeva chiaramente che per molti bambini un numero è grande se il suo nome in lingua italiana è lungo e ricco di consonanti (meglio ancora: un misto non ben definito fra le due cose), almeno da un certo punto in poi. Insomma: da 1 a circa 20 mi è sembrato che i bambini dominassero un ordine naturale corretto; poi si passava a cento, mille e poi a numeri ... "foneticamente ricchi", come duecentotrentasette, quattrocentoventidue ecc.

C'è un misto di consapevolezza adulta, in qualche modo appresa da esperienza ed imitazione (i due cardini dell'apprendimento spontaneo...), poi scattano modelli autonomi costruiti, imposti da taluni (i leader) e fatti propri da altri bambini.
Voglio dire: può darsi benissimo che il modello dei numeri di un bambino A si fermasse al venti (prendo questo numero come esempio, ma come esempio significativo perché mi è sembrato ricorrente) e che quindi, oltre tali "colonne d'Ercole" ci fosse il caos. Questo non sarebbe del tutto incredibile, specie se si vanno a vedere le competenze numeriche formali di moltissime tribù, anche oggi. Se si pensa che in francese "molto" si può dire *très*, che ha evidentemente la stessa radice di *trois*, si capisce subito che non deve stupire che vi fossero popolazioni che avevano nomi per i numeri uno e due, ma rendevano linguisticamente *tre* con *moltitudine*. Popolazioni più evolute arrivavano a dare nomi di numeri significativi e distinti fino a quattro, altre fino a dieci, altre fino a cento.
Quel bambino A arrivava a dominare linguisticamente e attraverso opportuni modelli mentali fino al venti, dopo di che, forse, il nome più adatto sarebbe stato "moltitudine" sia per ventuno, sia per quarantacinque... Il modello mentale può non aiutare, da un certo punto in poi. Ma questo non significa affatto che il bambino non abbia nomi di numeri a disposizione oltre il venti. Avrà un'immagine (almeno linguistica) del numero 200, per esempio se percorre una strada in auto con i genitori; oppure l'immagine di 63 se gioca a Tombola o al Gioco dell'Oca. D'altra parte, anche il membro della tribù che conta fino a dieci e poi dice sempre *molti* da undici in poi, non è vero che non abbia qualche forma di esperienza numerica: saprà ben distinguere due raccolti di banane, uno di undici e uno di venticinque frutti, per esempio!
Ma se un bambino B impone il modello linguistico fonetico secondo il quale tanto più lungo e ricco di consonanti è il nome del numero, tanto più grande è il numero in oggetto, il bambino A può esserne convinto, proprio perché manca, lì per lì, di un altro modello più adeguato.
In questo modo, A ha appreso un po' di matematica: l'ordine dei numeri naturali. L'ha appreso in modo spontaneo, semplicemente accettando un suggerimento implicito in una risposta di un compagno di scuola verso il quale egli prova fiducia.
Anche così possono dunque nascere modelli mentali. Conoscerli, sarebbe di straordinaria importanza, per una didattica più efficace e circostanziata della matematica; ma è incredibilmente difficile.
Le interviste effettuate ai bambini possono produrre conoscenza in questo campo, se sono condotte magistralmente e se l'intervistatore tiene presente che il soggetto risponderà non alla domanda posta, ma alla domanda che lui (il soggetto stesso) ha desunto, ricavato, creato per sé stesso, semmai sollecitato dalla domanda dell'intervistatore: per assonanza, per sollecitazione di un'immagine o grazie all'evocazione di un ricordo... Non tener conto di questa realtà può produrre errori di interpretazione ridicoli o addirittura gravi.

Da alcuni anni, mentre le sollecitazioni didattiche proposte dal gruppo di Bologna negli anni passati proseguono nella loro autonoma, lenta diffusione, noi stiamo lavorando ad una nuova impresa che, chissà, potrebbe portare a conclusioni didattiche diverse. Stiamo studiando soprattutto l'apprendimento spontaneo della matematica, per il quale meglio si adatta il termine "ingenuo". Ciò sia ai livelli di scuola superiore, media ed elementare, sia nella scuola dell'infanzia.
Per esempio: se si dà come sollecitazione ad un gruppo di bambini di 4 anni il testo di un problema aritmetico di prima elementare, come reagisce il bambino spontaneamente? Il maestro di scuola

elementare dà per scontato che l'attività del suo allievo sarà tutta tesa verso la risoluzione del problema proposto. Ma ciò accade perché, in modo più o meno implicito, è già scattata una norma sociale di interrelazione alunno-insegnante al cui rispetto tutto spinge: c'è già un contratto didattico in vigore. Nella scuola dell'infanzia, intesa nel suo senso più genuino, seppure vi siano molti contratti (soprattutto legati alla socialità), non c'è ancora quello legato alla soluzione dei problemi. È dunque curioso ma tutto sommato ovvio come il comportamento dei bambini si differenzi e, se pure vi sono dei bambini che tentano una risoluzione (con modalità spontanee, non preconfezionate dall'insegnante), ve ne sono molti altri che non sentono il testo-stimolo come una sollecitazione a trovare una soluzione, ma come una narrazione, comportandosi di conseguenza.

Questo capitolo è solo un preludio ai successivi resoconti dell'esperienza di ricerca degli ultimi anni, alla quale hanno partecipato membri del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna e tanti insegnanti di Scuola dell'Infanzia di varie zone d'Italia (ai quali, da alcuni anni, si sono aggiunti colleghi spagnoli).

2. Qualche esempio.

Spazio, *Ordine*, *Misura*, ovvero: parole-chiave per indicare la Matematica non come disciplina a sé stante, avulsa da un contesto reale, ma come campo di esperienza. La Matematica è una forma di conoscenza che si può rintracciare e scoprire in molte attività dell'uomo, pratiche o anche solo linguistiche.
Qualche esempio non potrà che giovare.

Esempio 1: Giochiamo a "Rubamazzo"?
- Mi piace giocare a carte, ma non so come si fa quel gioco.
- Te lo spiego io.

E qui inizia un'avventura linguistica che ci piace prendere come paradigma significativo di attività matematica. Spiegare a parole le regole di un gioco richiede un'organizzazione razionale dell'apparato linguistico di alto livello, non posseduta da tutti. Ascoltare un bambino che spiega ad un altro le regole di un gioco è un'attività di grande interesse e fornisce moltissime informazioni sulle capacità "logiche" di organizzazione linguistica. Attivare situazioni nelle quali ciò avvenga è di straordinaria importanza.

Esempio 2: Gioco delle costruzioni, libero o strutturato.
È un'attività profondamente matematica, legata ad accostamenti di pezzi, a progettazione preliminare (con dichiarazione esplicita) di quel che si vuole ottenere. Ma l'apparato linguistico messo in moto non è meno interessante e formativo delle azioni concrete. "Metto il tetto rosso sopra al quadrato blu" non contiene solo le parole "matematiche": "tetto" (che sta per triangolo) e "quadrato", ma molte altre:

- sopra
- tetto-rosso, che distingue da tetti-di-altro-colore
- idem per quadrato-blu
- sequenzialità: c'è un implicito ordine nel quale far avvenire la costruzione; per mettere A su B, occorre già in qualche modo aver situato B. La parola "sopra", insieme a tante altre della lingua italiana, è assai più ricca di profondi sensi matematici di quanto appaia, a prima vista. Essa assume diversi significati a seconda dei contesti e delle situazioni; e la cosa si fa interessante se si analizza la coppia di termini in opposizione sopra-sotto, perché allora si capisce bene il senso relazionale: A è sopra rispetto a B; e dunque B è sotto A; ma se cambio la situazione, A può andare sotto ... Come allenamento si possono facilmente ideare situazioni concrete che realizzino queste esperienze.

In definitiva: molte parole della lingua italiana possiedono, nella loro semantica, forti valenze matematiche che vanno esplorate.

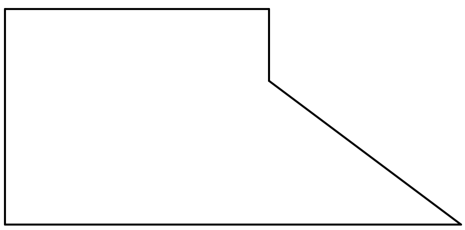
Esempio 3: Giocare è, in molti casi, già fare matematica.
In grande misura ed in moltissimi esempi giocare è l'esplicitazione di un'attività razionale. Specie nei giochi di strategia, il comportamento dell'individuo deve seguire regole (e dunque l'individuo deve saper distinguere se la mossa che intende eseguire rientra o no tra quelle ammesse: dal generale al particolare); ma deve anche perseguire un obiettivo e dunque programmare le proprie scelte in modo consapevole, coerente e consono allo scopo; il giocatore che gioca ad un gioco di strategia, per esempio al Rubamazzo detto sopra, deve cercare di vincere, deve quindi tener conto delle possibili scelte dell'avversario. Tutto ciò è matematica di alto livello, almeno come atteggiamento.

Esempio 4: Il racconto di un'esperienza, sia con linguaggio verbale, sia con altre forme linguistiche non verbali.
Questo tipo di attività sembra spontaneo e naturale ma, in realtà, comporta l'organizzazione di una sequenza, la scelta di elementi-chiave (significativi) della narrazione; ed in esso è adombrata la capacità di astrarre dal contesto reale, per estraniarsi come soggetto, vedersi con gli occhi dell'ascoltatore, scegliere per lui quegli elementi-chiave, riorganizzarli, proporli (contiene: sequenza, causa-effetto, ordine e forse altro,...).

Esempio 5: Simbolizzazione.
In moltissime scuole dell'infanzia italiane e straniere è d'uso ormai normale che ogni bambino abbia un simbolo che lo rappresenti, disegnato su un cartellino. A volte c'è addirittura il nome scritto del bambino in oggetto; altre volte c'è una figura che ha a che vedere con il bambino.
Per esempio, Marco può essere rappresentato da una stella o da un cavallo, indifferentemente, basta mettersi d'accordo. Dietro questa accettazione del simbolo che sta ad indicare un bambino c'è un po' di matematica; intanto c'è la necessità di accettare questo accordo (e questo ricorda molto quel che avviene con simboli matematici veri e propri, introdotti solo per convenzione, per semplice patto reciproco, ma esplicito). E poi c'è l'accordo: Marco potrebbe preferire come simbolo una sedia; ma anche se l'insegnante lo accontenta, Marco ha capito che sarebbe la stessa cosa, da un punto di vista simbolico, essere rappresentato da stella, cavallo o sedia? La sedia potrebbe proporla l'insegnante perché Marco è sempre stanco e si vuol sempre sedere ... Ma allora il simbolismo cambia totalmente aspetto.
Perché una corona circolare rossa in campo bianco significa: "divieto di transito nei due sensi di marcia", mentre la figura di un trenino nero in campo triangolare bianco significa: "attenzione: passaggio a livello incustodito"?
Si vede bene che i due simboli sono profondamente diversi. In matematica, perché "+" significa "addizione"? Per puro accordo; in passato (neppure tanto tempo fa), per indicare la somma di 4 e 5 si scriveva 4 *plus* 5: il simbolo, in questo caso, riassume l'espressione linguistica del concetto in esame. Oggi si scrive 4 × 5, laddove una volta si scriveva 4 *fia* 5 per dire "quattro volte cinque", cioè quattro per cinque. Accettare e poi usare a propria volta simboli che non sono "scheletri" di parole conosciute, allusioni a quel che si intende dire, ma puri accordi, è profondamente matematico, come atteggiamento.
Perché "+" dovrebbe rappresentare meglio l'addizione che non il simbolo "×" usato invece per la moltiplicazione? Perché in Italia usiamo ":" per la divisione, mentre in molti altri Paesi del mondo si scrive "÷"? Si tratta, come si vede, di puri accordi che devono essere espliciti proprio per la loro natura; ancora un esempio, l'uso di virgola e punto; noi scriviamo 7,5 per dire sette e mezzo (come numero e non come ora), laddove molti Paesi scrivono 7.5; noi scriviamo 1.000.000 per scrivere un milione, laddove molti Paesi scrivono 1,000,000. Se uno non sa queste cose, rischia ... cantonate colossali.

Esempio 6: Intervenire nell'ambiente per modificarlo e dunque progettare, eseguire, verificare, discutere.
Gli esempi, in questo campo, possono essere molteplici e tra loro diversissimi; per esempio, la riorganizzazione dei mobili di una sala, per esempio della classe:
- Quell'armadio lo spostiamo laggiù.
- Ma lì c'è il tavolo.
- Bene, allora dove possiamo mettere il tavolo?
Tutto ciò prima di eseguire davvero gli spostamenti, solo per pianificare il lavoro. Ecco un altro esempio di argomentazioni:
-Credo che questo tappo galleggi. Perché?
- Perché è leggero.
- Sono le cose leggere che galleggiano?
- Sì.
- Allora questo sassolino galleggia perché è leggero; e questo piattone affonderà perché è molto più pesante del sassolino.
- Sì.
- Bene, proviamo.
Provare, verificare, sono parole magiche. Abbiamo sentito e letto più e più volte che il criterio per il galleggiamento è la leggerezza. Eppure basta prendere una pietra anche piccola e leggera e confrontarla con una nave da carico, per capire che il criterio è del tutto errato! Provare, sperimentare, verificare, sono parole d'ordine di una didattica consapevole ed intelligente.

Esempio 7: Descrizione, comunicazione.
Due bambini si trovano da parti opposte di un paravento ma fanno parte della stessa squadra; uno dei due ha in mano un oggetto e deve descriverlo all'altro a parole; il primo vincerà un punto se la sua descrizione sarà stata così buona da far giungere il secondo a capire di che cosa si tratta (ovviamente il primo bambino non può dire il nome dell'oggetto, altrimenti perde il punto). A questo punto una coppia di bambini della squadra avversaria deve fare la stessa cosa.
Bambini ed insegnanti assistono al gioco. Sembra facile descrivere un oggetto a parole... D'altra parte, a che cosa serve una competenza linguistica, se non a comunicare?
Un bel gioco è quello di far descrivere a parole un disegno per far sì che un bambino lo ri-disegni. In dettaglio:
il bambino A esce dall'aula e i suoi compagni rimasti in aula inventano un disegno, per esempio:



Ora A viene richiamato in classe e va alla lavagna. I bambini in coro o uno alla volta devono descrivere la figura a parole, dando ordini verbali per farla ridisegnare.
Se ne vedranno delle belle. (E questo non solo nella scuola dell'infanzia e nella scuola elementare; ho provato a fare questo gioco anche nella scuola media superiore, con un risultato interessante: i ragazzi hanno perfettamente capito alla fine dell'esperienza come funziona e a che cosa serve il linguaggio della matematica, così preciso e specifico).

Esempio 8: Giochi su numeri come parole, come simboli o altro.

Entreremo più in dettaglio su questo tipo di giochi nei capitoli seguenti; qui mi serve solo per concludere questa lunga catena di esempi.
Non è vero che i bambini siano tabula rasa, quanto a competenze aritmetiche, anzi.
Ma in questi casi si parla sempre di numeri orali, detti a voce. Interessanti esperienze sono state fatte sulla produzione spontanea scritta dei numeri, con risultati inattesi: dal bambino che disegna una mano per indicare cinque, al bambino che sa già che cinque si scrive 5, ma che poi lo scrive simmetrico; al bambino che sa che deve esistere un simbolo per indicare cinque, ma non sa qual è, e allora se lo inventa; al bambino che sa che esiste un segno grafico per il cinque, ma lo trae dal mondo delle lettere e scrive: P.

3. Modelli mentali che si formano spontaneamente.

Il mondo della matematica scolastico è spesso fatto di stereotipi. La maggior parte delle attività (a qualsiasi livello scolastico) è una massa di meccanismi all'apparenza inutili che sembrano non aver capo né coda. Perché nella scuola media, per esempio, insegnanti ed allievi (e dunque: società) debbano perdere tempo (e dunque: denaro pubblico) ad effettuare calcoli inutili e ripetitivi come nel caso delle espressioni, è un bel mistero!
Lo stereotipo è annidato dovunque:

- nei modi di dire
- nei modi di fare (e questo fatto è stato da me e da altri più e più volte denunciato, con infiniti esempi);

ma, quel che è peggio

- nei modi di pensare.

Un giochetto banale e all'apparenza disarmante è utile. Si tratta di un problemino semplice semplice che invitiamo il lettore a risolvere:

Un autobus parte dal capolinea con 3 passeggeri a bordo. Alla prima fermata salgono altri 3 passeggeri. Alla fermata successiva scende 1 passeggero e ne salgono 4. Alla fermata dopo scendono 2 passeggeri e ne salgono 5. Alla fermata dopo scende 1 passeggero e ne salgono 3. Alla fermata dopo non scende alcun passeggero e ne salgono 4.
...

Al posto dei puntini c'è la domanda. Quale domanda si aspetta il lettore? Quella proposta da noi è: Quante fermate ha fatto l'autobus?
Se il gioco è presentato sotto forma orale, il 100% dei presenti ammette di aver contato i passeggeri e di aver ignorato il numero delle fermate. Perché? Ma è ovvio: di fronte a numeri occorre calcolare.
È ben noto il risultato che molti bambini di scuola elementare danno al seguente problema:
Un pastore ha 4 pecore grigie, 6 bianche, 3 nere e 5 capre. Quanti anni ha il pastore?
Risposta: 18, somma dei dati numerici presenti nel testo.
Questo tipo di atteggiamento è stato ampiamente studiato prima da psicologi ed ora anche da matematici interessati alle difficoltà degli allievi nel risolvere problemi, e quindi è ben noto.

Eppure l'attività matematica è esattamente il contrario dello stereotipo. Perché dunque se ne dà una simile immagine? Quando si comincia? Perché?
La risposta all'ultima domanda è quella più facile: il perché è da ricercarsi nell'ignoranza matematica di chi insegna matematica.
Chi insegna, non conoscendo, deve, per forza di cose, ripetere, imporre, e non creare ed accettare creazioni che poi non saprebbe gestire; nel caso della matematica, riproporrà più o meno quel che

ricorda di sé stesso come allievo, spesso in modo storpiato, con minime personali reinterpretazioni. Non c'è nulla da fare.

Detto ciò, veniamo al titolo di questo paragrafo.
Bisogna stare attenti: mentre molte altre materie scolastiche si apprendono in famiglia, per la strada, per caso, come la lingua italiana o straniera, la geografia o sue porzioni, la storia o sue porzioni, per la matematica è assai più raro che ciò avvenga, nel senso che la stragrande maggioranza della matematica si apprende solo nelle aule scolastiche.
Non che la strada non insegni matematica, anzi. Ma mentre la lingua imparata per la strada o in famiglia uno se la porta a scuola, perché quello è il suo bagaglio e quello usa, la matematica imparata a casa o per la strada sembra sempre stridere o addirittura opporsi a quella scolastica.
Per cui si formano due apprendimenti:

- uno *profondo*, al quale contribuisce ogni ambiente;
- uno *epidermico*, che spesso ha come fonte la scuola.

Nel profondo, l'allievo si fa modelli suoi personali delle cose e della cultura, dunque anche della matematica; e questi modelli profondi sono creati sia dalla scuola sia dall'extra-scuola. Ma poi egli impara ad usare, per il tempo strettamente necessario, altri modelli, quelli epidermici, che non sono profondamente suoi, sono quelli appiccicati per un pelo, e pronti a cadere.
Vi sono dunque modelli formati nel profondo, quelli che contano davvero, e modelli solo epidermici, che non incidono sulla cultura reale, sulle capacità reali, fintantoché non diventino profondi. Il bambino deve organizzare logicamente suoi propri modelli tutto quel che lo circonda e che gli accade: dunque modelli che in larga parte hanno a che fare con il mondo della matematica si formano spontaneamente.

4. Aiutare il formarsi di modelli corretti.

Nel campo della matematica (o, se si preferisce, nel campo di esperienza Spazio-Ordine-Misura) sembra essere assai più importante il formarsi di solidi modelli mentali profondi corretti, anche se generali, piuttosto che apprendimenti formali che non sfociano in vere e proprie costruzioni.
La domanda è: ci sono attività matematiche che si compiono normalmente nella scuola dell'infanzia (non voglio imporre attività diverse dalle usuali, o suggerirne più di quelle che in questi ultimi trent'anni ho suggerito e che in molti luoghi sono ormai diffusissime) adatte a favorire la formazione di corretti modelli mentali nel mondo-della-matematica?

La risposta è ovviamente positiva. Mi limiterò qui ad una raccolta di esempi.

Esempio 1: Il gioco della caccia al "numero".
Bambini ed insegnante escono a fare una passeggiata ma, questa volta, c'è uno scopo ben preciso: man mano che proseguono, devono indicare ai compagni tutti i numeri scritti che vedono.
Un'attività all'apparenza banale e che attira invece moltissimo i bambini. Essi vedranno numeri sulle targhe delle auto, sui cartelloni pubblicitari, accanto alle porte delle case, sul telefono del bar eccetera; vedranno cifre di forma diversa, di colore diverso, di grandezza diversa... Arrivati a scuola, potranno proseguire il gioco: ciascuno deve disegnare i numeri che ricorda. Non solo, ma il gioco prosegue a casa: ogni bambino deve farsi aiutare dai genitori a rintracciare numeri sulle riviste, biglietti dei cinema, etichette di bottiglia ecc. Si farà poi un gran cartellone con i numeri raccolti. Il mondo è pieno di numeri!

Esempio 2: Il numero nel calendario.
Nel corso del triennio fra i 3 ed i 6 anni, il calendario acquista importanza sempre maggiore. Curioso il fatto che, mentre in mille altre attività numeriche la numerazione prosegue indisturbata (l'unica difficoltà è conoscere i nomi dei numeri), nel caso del calendario la numerazione ha un

massimo: 31 (e talvolta neppure quello). Non esiste il 32 gennaio; eppure, bambini della scuola elementare, si confondono; alla richiesta:
Giovanni inizia le vacanze di Pasqua il 27 marzo e sta a casa 6 giorni; che giorno ritorna a scuola?
Moltissimi bambini rispondono “il 33 marzo”. La struttura numerica della conta dei numeri naturali dipende dunque dall’àmbito.

Esempio 3: Il gioco del numero più grande.
Ne ho già parlato nel primo capitolo e quindi non mi ripeterò. Insegnanti diversi faranno prove in ambienti diversi ottenendo risposte diverse. Sarebbe bene che poi i bambini ne discutessero fra loro.

Esempio 4: I numeri della probabilità.
Da anni suggerisco giochi nel campo della probabilità che, a mio avviso, è un campo di esperienza di forte presa emotiva.
L’“attesa” di un risultato condiziona fortemente la capacità razionale di ragionare su quel che è lecito attendersi.
Uno dei principali obiettivi è linguistico. Si ritiene normalmente che i bambini anche piccoli sappiano ben distinguere tra evento “certo”, “impossibile”, “possibile”, ma nella realtà non è così. La lingua, poi, non aiuta affatto. “Certo”, a volte, vuol dire: “razionalmente possibile ma, in base alla mia fortuna, senza discussione”.
Non ci si deve limitare a prendere per buone le risposte orali dei bambini, tanto più se nell’àmbito solo di una discussione; si deve fare il gioco davvero e, soprattutto, osservare i comportamenti. Attività ben congegnate in questo campo sono formidabili veicoli di modelli mentali acuti e profondi, di grande presa emotiva. Si può arrivare, come testimoniano moltissime esperienze condotte nell’àmbito del Nucleo di Ricerca Didattica di Bologna, a far apprezzare sensibilmente che esistono vari “gradi”, vari “livelli” di probabilità. Per esempio, dopo opportuna esperienza concreta, se ad un bambino di 5 anni viene presentato un dado che ha 4 facce rosse e 2 verdi e gli si chiede di “puntare” (in forma adeguata) su rosso o su verde, si può stare sicuri che egli punterà sul rosso (questo è solo un esempio, ma ne ho a disposizione molti altri).
A mio avviso il campo della probabilità qualitativa (senza calcoli, se non paragoni) offre spunti notevolissimi per la formazione di competenze profonde.

Esempio 5: Organizzazione dello spazio.
In larga misura ciò significa: orientamento, padronanza di sistemi di rappresentazione. Si tratta, per esempio, di giocare al Gioco degli automi.
Un bambino funge da automa: egli è senza volontà ed esegue automaticamente quel che un altro bambino gli ordina di fare (ma poi i ruoli si scambiano). Con ordini opportuni, l’automa deve compiere certi percorsi. Di solito, tendiamo a far privilegiare sistemi di tipo polare, nei quali si danno indicazioni nelle quali appare un polo, una direzione ed una distanza, del tipo:
- Ruota verso la finestra e avanza di sei passi.

Il bambino-automa gira su sé stesso fino a vedere davanti a sé la finestra e, a questo punto, avanza di 6 passi. Ora riceverà nuovi ordini. Fatto il gioco concretamente, si può passare (cosa che sempre proponiamo nella scuola elementare) a plastici e dunque ad attività sempre concrete, ma su modelli.
Per esempio c’è una battaglia in corso e si danno ordini al cannone:
- Ruota verso la finestra e spara di tre palmi.

Nella scuola elementare l’ordine analogo è:
- Ruota di 60 gradi e spara di 350 metri.

Questo dopo aver stabilito di comune accordo il verso antiorario e di far uso di una certa scala; uso di goniometro e scala rendono molto ricca, da un punto di vista matematico, l’attività.
Ma accettare una forma di controllo razionale-linguistico dello spazio, tanto da arrivare ad organizzarlo sotto forma di coordinate, è un’attività di grandissimo livello. Essa forma modelli mentali ampi e di grande rilievo: *Lo spazio è fuori di me, ma io ne faccio parte*; le cose sono

organizzate nello spazio e rispondono a domande del tipo: dove?: *Lo spazio è misurabile ed io posso misurarlo*.

Esempio 6: Attività logiche.
Non è bene aggiungere né l'aggettivo "matematiche" (la logica matematica è una disciplina universitaria), né "formali" (la "logica formale" è fuori dalla portata dei bambini). Si potrebbe dire: uso razionale della lingua, con la conseguente consapevolezza che la lingua si gestisce in modi diversi.
Per esempio, due giochi si possono pensare l'uno come l'opposto dell'altro:

- data una raccolta di oggetti vari, si stabilisce una proprietà e si raccolgono quegli oggetti della raccolta che hanno quella data proprietà.
- data una raccolta (piccola) di oggetti prelevati da un'altra raccolta (grande), cercare di capire qual è la proprietà, il criterio in base al quale è stata selezionata.

È un gioco molto praticato che però va proposto in un contesto opportuno, perché non si trasformi in un esercizio noioso, sterile e stupido, cioè senza uno scopo significativo.
Si tratta di un'attività formidabile, ma su questi concetti sorvoliamo. Che tipo di consapevolezza si dà? Che: cambiando la proprietà, pur conservando la raccolta (grande), si cambia la raccolta (piccola) che ne deriva.
Dunque, la lingua è uno strumento: le parole selezionano l'ambiente. Ciascuno di noi può essere l'artefice del risultato; le parole non si possono usare a vanvera, ma vanno predisposte all'uso. È un vero e proprio progetto logico/linguistico. Un modello formidabile di come funziona la lingua.

Esempio 7: Esperienze di misura.
Nel campo della geometria ci sono idee-base ciascuna delle quali è adatta a fungere da esempio per la costruzione di opportuni modelli. Così, nel campo della misura. Mettendo insieme le due cose, un esempio convincente è il seguente: arrivare a far capire nel profondo che il numero che esprime la misura di qualche cosa dipende dall'unità di misurazione. La caraffa dell'acqua misura 10 se si usa il bicchiere come unità, ma misura 25 se, come unità, si usa la tazzina.
La misura è la stessa, ma il numero che la esprime no.

In tutto ciò, però, ci sono due difetti:

- Questi sono tutti modelli particolari su qualcosa di specifico. Sarebbe bene trovare una teoria generale, un modo di comportarsi in generale da parte dell'educatore, per sapere come fare in generale, non nei singoli casi specifici, per favorire una buona costruzione di singoli modelli adeguati alle circostanze.
- Non c'è consapevolezza nel bambino di quel che succede. Perché non può esserci, o perché non abbiamo ancora esplorato abbastanza questa questione?

5. Caratteri generali dei processi di insegnamento – apprendimento della matematica nella scuola dell'infanzia.

Nel paragrafo precedente mi sono limitato a fornire solo alcuni esempi, da ciascuno dei quali ho tratto una frase che dà qualche indicazione significativa sulla formazione di convincimento che il bambino può radicare nel profondo e che si possono così riassumere:

- Il mondo è pieno di numeri (e quindi non è vero che i numeri investono solo il mondo della scuola; essi fanno parte a pieno e di diritto dell'esperienza quotidiana).
- La struttura della conta numerica dipende dal contesto nel quale la si usa (l'aritmetica è al mio servizio e si adegua ai miei bisogni, posso e devo dominarla; esempi del calendario e del danaro).
- I numeri hanno tutti un nome, ma non dipendono dal loro nome (per esempio: sei ha tre lettere, ma è più grande di quattro che ha sette lettere e cose del genere; rapporti: numeri-lingua e più in generale, rapporti: matematica-lingua).

- Non posso condizionare il mondo ed i suoi avvenimenti con la forza del mio desiderio (mi riferisco alla probabilità di un evento, ma su questo ci sarebbe tanto da dire).
- Lo spazio è misurabile, organizzabile razionalmente (ed io posso fare tutto ciò).
- L'uso della lingua risponde ad un progetto (posso dire quel che voglio esprimere, purché organizzi razionalmente l'uso della lingua; la lingua ha una forte componente logica o, se si preferisce, razionale).
- La misura delle cose dipende dalle cose, ma la sua espressione numerica dipende dalle mie scelte.

Tutti risultati parziali, anche se significativi. Ma qual è l'atteggiamento razionale che l'educatore deve assumere su questa strada? Quello del favorire una buona costruzione di modelli mentali adeguati alle singole circostanze? Nel bambino c'è o no consapevolezza? Se non c'è, è perché non può esserci? O ci sono altri motivi?

Dagli esempi proposti risulta che l'atteggiamento generale dell'educatore in matematica, specie (ma non solo) nell'àmbito della scuola dell'infanzia, è principalmente un atteggiamento di disponibilità a mettere in discussione le proprie convinzioni, accettando di prendere in esame seriamente e senza prosopopea le proposte razionali del bambino. Farsi un modello mentale è una cosa, ma produrlo all'esterno, cioè mostrarlo a qualcuno, è tutt'altro. Occorre saper sfruttare l'esperienza, saper fare uso di un ampio bagaglio linguistico, almeno in parte essere consapevoli dell'esistenza di quella che gli psicologi chiamano k-tacita (*conoscenza tacita*) che, spesso, è difficile da esprimere a parole; occorre (e questo punto, a mio avviso, ingloba tutti gli altri) saper "tradurre" una sensazione (il modello interno) in una produzione esterna che gli altri possano comprendere.

Con questo, non sapremo ancora com'è fatto un tale modello interno, ma almeno vedremo la sua esteriorizzazione, la quale ci fornirà qualche idea sulla coppia: modello interno – sua traduzione, tanto migliore quanto più approfondita è la conoscenza che avremo del bambino in questione.

Dicevo del ruolo e più ancora dell'atteggiamento dell'insegnante; mi pare che il paradigma al quale fare riferimento pedagogico sia quello della R.-A. (= ricerca-azione), perché ci deve essere la disponibilità a rimettere continuamente in discussione tutto da capo: conoscenze e convinzioni, sulla base delle nuove acquisizioni ottenute nel rapporto con il bambino, con ogni singolo bambino.
Per dirlo in modo esplicito, gli esempi forniti erano solo esempi, ma scelti in modo oculato perché ciascuno di essi può dare adito ad interessanti attività alle quali ogni bambino potrà rispondere in modo molto personale e l'insegnante vedrà atteggiamenti diversi dei diversi bambini nei singoli casi. Infatti quasi ogni bambino accetterà che il mondo è pieno di numeri, ma al momento dell'uso della conta numerica nel calendario proporrà soluzioni molto personali, diversissime, pur con gli stessi stimoli.
L'atteggiamento generale sarà quello di accettare il modello esterno proposto, proprio per metterlo in discussione in modo costruttivo, allo scopo di favorire in futuro la consapevolezza (indotta) del fatto che la verità è solo un momento di passaggio verso un'altra più comprensiva.

Come diceva il grande matematico e studioso di *Problem Solving*, George Polya, l'atteggiamento dell'insegnante di matematica di fronte all'errore non deve essere quello (ahimè, il più diffuso) di chi dice sempre: "No, hai sbagliato, non va bene", ma anzi quello che (proprio per le peculiarità della disciplina) afferma: "Sì, va bene; e se tu provassi a...".

Poiché nella scuola dell'infanzia le attività si fanno e non ci si può limitare a lezioni tenute dalla cattedra, ciò sembra ancor più facilmente ottenibile in corso d'opera: basterebbe sempre attivare meccanismi di descrizione del progetto, delle attese, di quel che si fa, di immediata verifica di quel che si è appena fatto, di ri-progettazione, e così via, arrivando a fornire, come atteggiamento

generale, quel che s'è detto sopra: la consapevolezza del fatto che ogni immagine che mi sono fatta non è definitiva, ma è lì, pronta, disponibile a compiere un passo avanti, a... fagocitare nuove situazioni che sembrerebbero sfuggire all'immagine precedente.
Apprendere vuol dire avere questa disponibilità-capacità ad ampliare l'immagine. (Attenzione. Ampliare vuol dire: rompere, includere un fatto nuovo, richiudere lasciando socchiusa la feritoia; la rottura può, ma non necessariamente deve, essere traumatica).
Insegnare vuol dire: rendere possibile e naturale questo processo.

Si tratta non solo di trovare gli esempi opportuni (che potrebbero essere i sette precedenti o altri; o tutti quelli indicati negli Orientamenti; o tutti quelli da me esaminati in dettaglio nel corso degli anni in molti libri ed articoli, ben noti e diffusi), ma di saper cogliere al volo ogni situazione. Avendo ben compreso che cos'è questa benedetta matematica e dove sta, coglierla, esplicitarla, situarla, decontestualizzarla, sfruttarla per avviare questo tipo di processo di apprendimento.
Ho sempre sostenuto la necessità di un curricolo nella scuola dell'infanzia perché temo lo spontaneismo e l'improvvisazione, ma ho indicato sempre un ampio spettro di curricoli possibili, all'interno di una vasta varietà di obiettivi-contenuti; nel senso che il curricolo mi pare possa anche solo consistere in un esempio di programmazione possibile, pedagogicamente supportata da un elenco di contenuti possibili che possono anche essere puramente indicativi.

Mi sono anche posto il problema della consapevolezza, e la cosa è assai delicata.
Uno dei pilastri dell'attuale ricerca in didattica si basa sulla necessità della metacognizione: avere consapevolezza di quel che so. E, si può aggiungere, di quel che so fare.
Qualunque educatore sensibile comprende bene che la riflessione su quel che so, rafforza quel che so, perché me lo fa vedere dall'esterno, in modo critico; e rafforza quel che so fare, perché lo vedo non solo in atto, ma pure in potenza. So di sapere qualche cosa e questo, in certa misura, mi dà anche indicazioni su quel che non so (riferimenti a Socrate sono voluti): una bella forma di conoscenza. So che cosa so fare, e vale un discorso analogo su quel che so di non saper fare.

Saper descrivere la propria conoscenza è un obiettivo di altissimo livello, metacognitivo.
Esempio 1. Per descrivere le regole di un gioco si fa così e così...
Esempio 2. Per disegnare un oggetto si fa così e così...
Esempio 3. Per calcolare il giorno di rientro a scuola dopo le vacanze di Pasqua si fa così e così...
È molto di più che descrivere le regole del Rubamazzo, che disegnare una mela, che calcolare che giorno viene dopo il 31 marzo, ...

Nella pratica matematica c'è sempre un mescolamento di livelli: per dimostrare un teorema occorre anche sapere che cosa vuol dire dimostrare; per dare una definizione, occorre anche sapere che cosa vuol dire definire. Ora, si dirà che i bambini della scuola dell'infanzia e del primo ciclo della scuola elementare non sono matematici e che quindi il paragone non tiene.

- *È vero*. Ma questo testo è destinato ad educatori ed è bene che essi abbiano perfetta consapevolezza del fatto che la matematica è disciplina in continua evoluzione; tanto più se essi hanno accettato il carattere generale delineato sopra, che li vede attivi come educatori e non passivi ripetitori più o meno smaliziati.
- *È falso*. Il paragone tiene benissimo. Proprio a causa della sua ingenuità (o, meglio, per mancanza di remore che verranno, poi, indotte dalla scuola), nel bambino piccolo c'è un continuo salto di livello: dal fare al come si fa. Per esempio, basta vedere come il bambino costruisce la lingua parlata: mentre la fa (per imitazione, essenzialmente) la costruisce (per riflessione sul processo in base al quale l'ha costruita; l'esempio tipico italiano è: io vado, tu vai, egli va, noi vadiamo,.... oppure: io ando, tu andi, egli anda, noi andiamo,...).

Matematica e lingua, come il lettore avrà notato, sono sempre campi di esperienza molto vicini. Nel programma di italiano per la scuola primaria si parla esplicitamente di "riflessione sulla lingua".

6. Conoscenze alla base delle strategie ingenue messe in atto nel fare matematica.

Anche se altrove ho cercato di definire in maniera abbastanza precisa (per quanto è possibile in questo campo) l'aggettivo "ingenue" riferito a "strategie", qui userò lo stesso aggettivo in modo... ingenuo, cioè intendendo quel che il termine suggerisce intuitivamente.
In base alle proprie conoscenze poco o punto formali, le strategie messe in atto dai bambini di 3-6 anni nel fare matematica non possono che essere ingenue; e lo permangono fin tanto che non vi sia la consapevolezza della quale ho parlato nel capitolo precedente. Dopo di che l'aggettivo "ingenue" non calza più, anche se séguita a non essere sviluppato un apparato formale (ma su quel che significa "formale" sarebbe interessante discutere).
Farò ora la proposta di alcuni esempi su competenze che il bambino di 3-7 anni possiede, in campo matematico, e che dunque costituiscono la riserva della quale fa uso nell'elaborare le proprie strategie.

Esempio 1: Il bambino sa contare.
Intendiamoci bene. Mi pare di poter sostenere che "contare" significhi un complesso di tre cose:
- avere consapevolezza del fatto che c'è un primo numero (uno)
- che dopo l'uno c'è il due e che si possa sempre così proseguire: dopo un numero ce n'è un altro (e solo uno) che è il suo successivo, in un processo che prosegue (senza fine?)
- conoscere i nomi dei numeri che si susseguono nella conta; questo punto merita un approfondimento; nelle lingue moderne, di solito vi sono dieci nomi distinti per i numeri da 1 a 10 e poi si costruiscono i nomi dei numeri successivi utilizzando i nomi precedenti, combinati in varie forme; in italiano undici è una riduzione di uno-dieci; dodici di due-dieci; tredici di tre-dieci; quattordici di quattro-dieci; quindici di cinque-dieci; sedici di sei-dieci; poi c'è una rottura di regola e diciassette è dieci-sette, con inversione dei due nomi (nelle altre lingue vicine all'italiano l'inversione può apparire in altri punti; per esempio in castigliano avviene al sedici); dopo di che diciotto è dieci-otto; diciannove è dieci-nove; e finalmente venti fa iniziare una regola facile che si trascina poi avanti ed avanti senza più grandi rotture. Costruire i nomi dei numeri non è banale.

Ebbene, mi sembra di poter sostenere che un bambino che conti a voce in questo modo: "uno-due-tre-quattro-sette-nove-sei-..." e così via non è che non sappia contare, perché dimostra di aver capito le prime due parti di quel che significa contare; quel che non sa è qualche nome di numero. O, meglio, i nomi li sa, ma non ha ancora la consapevolezza di dove mettere quei nomi, a che punto della successione.
Sostengo quindi che il bambino, di solito, sa contare, anche se presenta qualche incertezza linguistica (e non matematica in senso stretto).

Esempio 2: Il bambino sa che i numeri hanno funzioni anche molto diverse fra loro.
Il numero può servire per contare, per indicare quantità, misure, per indicare un posto, o altro. Non c'è stupore per questa varietà di usi, anzi naturalezza. Quel che succede, semmai, è una variazione di modalità d'uso a seconda della funzione. Gérard Vergnaud fa notare come un bambino che conti non per il contare in sé, ma per indicare quantità, arrivato all'ultimo naturale-ordinale, quello che indica anche la cardinalità della raccolta contata, metta un'enfasi diversa nel pronunciare proprio quel numero, o perché lo ripete (1, 2, 3, 4, 5, ...5!) o perché lo pronuncia con tono diverso (1, 2, 3, 4, **5**). In questo atteggiamento (ed in altri analoghi) si vede bene come il bambino abbia consapevolezza della variazione d'uso del numero. Nessun bambino direbbe che un foglio di album che misura 6 matite viene dopo di un autocarro che misura 5 matite... Anche se in forma inconsapevole, si capisce che quel 6 non è il successivo di 5, almeno in un tale contesto. Nessun bambino si stupisce del fatto che il posto n. 2 sia per una sola persona e non per due. E così via.

Esempio 3: Il bambino sa organizzare strategie.
A Pinerolo (Torino), Francesco Aglì ed Aurelia Martini hanno raccolto in un voluminoso dossier documenti relativi a giochi di strategia eseguiti dai bambini, con protocolli autentici. Una vera miniera. Certo, giocare a scacchi, per un bambino di 3 anni, vuol dire mettere i pezzi-soldatini in piedi e poi farli cadere. Ma un bambino di 5 anni è del tutto in grado di giocare a Gale, o a Tris, o a Germogli,... e di spiegare che cosa sta facendo.

Esempio 4: Il bambino sa rappresentare situazioni.
A bambini di Bologna, Valeggio sul Mincio (Verona) e Imola (Bologna) abbiamo proposto un esercizio di aritmetica tratto da un libretto di matematica del primo ciclo. Uno dei testi era:
Pierino va al mercato e compra 6 uova. Nel tornare a casa ne rompe 2. Quante ne consegna alla mamma?
Le risposte sono state le più disparate. C'è chi ha scritto un 4 nei modi più vari possibili (si veda la parte finale del capitolo 2). C'è chi ha disegnato una mamma con un braccione, pronta a sculacciare lo sbadato Pierino. C'è chi ha disegnato un sasso, causa dell'inciampo che è costato due uova a Pierino. C'è chi ha disegnato uova. Chi una casa con il sole. Chi ha tentato di trascrivere a modo suo il testo... La casistica sembra enorme; ma si potrebbe ridurre a:

- risposte che ineriscono al contesto del problema, in qualche modo
    - risposte formali o presunte tali
    - risposte figurali
- risposte che risultano estranee al contesto.

Attenzione, però: le distinzioni non sono affatto banali o evidenti. La risposta del bambino che ha disegnato il sasso, senza intervista personale, sarebbe stata classificata tra quelle che risultano estranee al contesto, e invece va classificata fra le risposte che ineriscono al contesto, tra le figurali. Dunque, ogni risposta va accuratamente vagliata e va accompagnata da un colloquio diretto immediato con l'autore.
Di fatto, lo stesso problema, dato in prima elementare (maggio), produce risultati diversissimi; anche se rimane qualche risposta inerente al contesto, figurale (queste permangono fino alla seconda media, come ho visto in molte esperienze), spariscono le risposte estranee al contesto. La stragrande maggioranza delle risposte sono formali (o presunte tali). Troppo presto. I bambini non sono in grado di dominare quel tipo di simbolismo, l'apparato formale che gli insegnanti introducono subito, finendo con l'appesantire di inutili formalismi qualche cosa che di per sé sarebbe naturale, e perdendo di vista il lato concettuale.

Esempio 5: Il bambino ha varie idee sulla misura e sul processo di misurazione, in vari contesti
Barlumi abbastanza buoni di uso del denaro (o, almeno, di quel che significa, da un punto di vista matematico, anche se talvolta tende a dare maggior valore alle monete più grandi o a mucchi più numerosi di monete). Idee piuttosto buone su misure di lunghezza, larghezza e profondità. Poca o nessuna dimestichezza con il concetto di estensione superficiale, ma idee abbastanza fondate di equiestensione (specie se ha giocato con il tangram ed ha accostato piastrelle o se ha piegato carta per il gioco della simmetria).

Esempio 6: Il bambino ha discrete competenze su varie questioni di natura topologica.

Esempio 7: Il bambino ha una discreta competenza sul fatto che vi siano regole nella formazione delle frasi e delle singole parole.
Questo lo porta a costruzioni sintattiche delle frasi.

È ovvio che si potrebbe continuare a lungo, con chissà quanti altri esempi, oppure raffinando notevolmente gli esempi precedenti (gli esempi 5 e 6 potrebbero fornire ampi spunti per indagini).

Non si può non tenere conto di queste competenze di base già acquisite, né nella didattica all'interno della scuola dell'infanzia, né nel momento del passaggio alla scuola elementare.
L'assurda stupidaggine del bambino-tabula-rasa è morta e sepolta. Così come sembra ribaltata la tendenza a valutare fasi o stadi su quel che Pierino non sa fare: Pierino sa e sa fare molto. Ed è assai più produttivo, per i futuri processi di apprendimento/insegnamento, che l'educatore sappia riconoscere e sfruttare, in positivo, le capacità di Pierino.

Bibliografia.

Angeli A., D'Amore B., Di Nunzio M., Fascinelli E. (2011). *La matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 5. Bologna: Pitagora.